SOLUCIONARIO PROBLEMAS REALIMENTACION DE ESTADOS

P1: Sea un servo descrito por la función de transferencia $G(s) = \frac{1}{S(S+0.1)}$ Deseamos diseñar un control por realimentación de estados digital.

a) Escriba las ecuaciones de estado discretas, donde la primera variable sea la posición y la segunda la velocidad. Asuma un periodo de muestreo de 1s

Teniendo en cuenta que:

$$x1 = x$$

$$x2 = v$$

$$T = 1s$$

Y, aplicando transformada inversa de LAPLACE a la FT:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s(s+0.1)}$$

$$Y(s)s^2 + 0.1sY(s) = u(s)$$

$$\ddot{y}(t) + 0.1\dot{y}(t) = u(t)$$

Ecuación Diferencial

Se tiene lo siguiente:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x1} \\ \dot{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \end{pmatrix}$$

EE en tiempo CONTINUO

Donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \; D = 0$$

Ahora, calculemos las matrices de la EE en tiempo discreto (en lazo abierto) del siguiente modo:

$$G = \Phi(T) = e^{AT} = L^{-1}((SI - A)^{-1})$$

$$G = L^{-1}\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{0.1}{0.1(s+0.1)} \\ 0 & \frac{1}{(s+0.1)} \end{bmatrix}$$

Finalmente obtenemos:

$$\therefore G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{0.1}(1 - e^{-0.1T}) \\ 0 & e^{-0.1T} \end{bmatrix}$$

Ahora, para Hse tiene:

$$H = \int_0^T \Phi(T)dT.B$$

$$H = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{0.1}(1 - e^{-0.1T}) \\ 0 & e^{-0.1T} \end{bmatrix} dT.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} T & \frac{1}{0.1^2}(T + e^{-0.1T} - 1) \\ T & \frac{1}{(-0.1)}(e^{-0.1T} - 1) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore H = \begin{pmatrix} \frac{1}{0.1^2}(T + e^{-0.1T} - 1 \\ \frac{1}{(-0.1)}(e^{-0.1T} - 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, obtenemos lo siguiente: $T = 1s$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.9516 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 90.4837 \\ 0.9516 \end{pmatrix}$$

$$Cd = (1 \quad 0); Dd = 0$$

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.9516 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 90.4837 \\ 0.9516 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1 \quad 0)x(k)$$

EE y E de salida en tiempo Discreto

b) Obtenga la matriz K de realimentación para una ubicación de POLOS equivalentes a $s = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{3}/2$. Simule la respuesta

En principio, verifiquemos si el sistema en cuestión es controlable. Por definición se tiene lo siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 90.4837 & 91.3892 \\ 0.9516 & 0.8610 \end{pmatrix}$$

$$detM \neq 0$$

Por lo tanto, el sistema ES CONTROLABLE.

Determinemos la ecuación característica del proceso (en lazo abierto):

$$|zI - G| = \begin{vmatrix} z-1 & -0.9516 \\ 0 & z-0.9048 \end{vmatrix}$$

$$|zI - G| = z^2 + (-1.9048)z + 0.9048$$

Donde los coeficientes de la ecuación característica del proceso serian:

$$a1 = (-1.9048)$$

$$a2 = 0.9048$$

Además por condición del problema, los polos deseados son:

$$s1{,}2 = -\varepsilon * wn \pm jwn\sqrt{1-\varepsilon^2} = -\frac{1}{2} \pm j\sqrt{3}/2$$

$$\varepsilon * wn = 1/2$$

$$wn\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{3}/2$$

Operando adecuadamente, se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$wn = 1$$

$$z1{,}2 = e^{s1{,}2T} = e^{-\varepsilon * wn.T} . e^{\pm jwn.T.\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$z1{,}2 = \{0.3929 \pm j0.2993\}$$

Determinemos la ecuación característica deseada del siguiente modo:

$$\big(z - (0.3929 + j0.2993)\big)\big(z - (0.3929 - j0.2993)\big) = z^2 - z(2 * 0.3929) + (0.3929^2 - (j0.2993)^2)$$

$$= z^2 - 0.7828z + 0.2439 \ldots (*)$$

Donde los coeficientes de la ecuación característica son:

$$\alpha 1 = -0.7828$$

$$\alpha 2 = 0.2439$$

Además, se cumple también la siguiente expresión:

$$|zI - G + HK| = |\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.9516 \\ 0 & 0.9048 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 90.4837K1 & 90.4837K2 \\ 0.9516K1 & 0.9516K2 \end{pmatrix}|$$

$$|zI - G + HK| = |\begin{pmatrix} z - 1 + 90.4837k1 & -0.9516 + 90.4837k2 \\ 0.9516k1 & z - 0.9048 + 0.9516k2 \end{pmatrix}|$$

$$|zI - G + HK| =$$

$$= z^2 + z(90.4837k1 + 0.9516k2 - 1.9048) + (-80.9641k1 - 0.9516k2 + 0.9048)$$

Igualándolo con la expresión (*) se tiene:

$$k1 = 0.0484$$

$$k2 = -3.4230$$

$$\therefore K = \begin{pmatrix} 0.0484 & -3.4230 \end{pmatrix}$$

Matriz de ganancia del regulador

c) Diseñe un estimador de estados completo con K elegida de modo tal que el polinomio característico del estimador sea z^2

La ecuación característica deseada, por condición del problema, sería la siguiente:

$$\Phi = z^2$$

Además, como del sistema, se tiene la siguiente expresión:

$$\Phi = z^2 + z(90.4837k1 + 0.9516k2 - 1.9048) + (-80.9641k1 - 0.9516k2 + 0.9048)$$

Igualando ambas expresiones para hallar la matriz K, se tiene:

$$k1 = 0.1050$$

$$k2 = -7.9823$$

Finalmente, se tiene:

$$K = \begin{pmatrix} 0.1050 & -7.9823 \end{pmatrix}$$

Matriz de ganancia del regulador

P2: Sea un servomotor descrito por la función de transferencia $G(s) = 1/s(s+1)$. Suponga un muestreo del sistema con un periodo $T = 0.1s$ y el uso de re constructor de orden cero

a) Obtenga el modelo discreto en variables de estado para esa planta

En principio, al hallar su EE y E de salida continua, se tiene:

$$s^2Y(s) + sY(s) = U(s)$$

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t)$$

$$y = x1$$

$$\dot{y} = \dot{x}1 = x2$$

$$\ddot{y} = \ddot{x}1 = \dot{x}2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x1 \\ x2 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

Representación en el espacio de estado en tiempo CONTINUO del sistema

Además, se cumple:

$$G = \Phi(T) = e^{AT} = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{pmatrix}$$

$$H = \int_0^T \Phi(T) dT.B$$

Operándolo adecuadamente, se tiene:

$$H = \begin{pmatrix} T + e^{-T} - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la EE de forma discreta seria:$T = 0.1s$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.0952 \\ 0 & 0.9048 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 4.8 * 10^{-3} \\ 0.0952 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (1 \quad 0)$$

EE y E de salida en tiempo discreto

b) Se desea usar realimentación de estado para obtener una respuesta a lazo cerrado con los ceros de la ecuación característica ubicados de modo que tengamos una relación de amortiguamiento $\boldsymbol{\varepsilon = 0.46}$ y una constante de tiempo $\boldsymbol{\tau = 0.5s}$. Calcule la matriz de realimentación.

Con los datos proporcionados, hallemos los polos deseados de la siguiente forma:

$$\varepsilon = 0.46$$

$$\tau = 0.5s$$

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon . wn}$$

$$wn = 4.3478$$

$$\sigma = \varepsilon . wn = 2$$

$$w = wn\sqrt{1-\varepsilon^2} = 3.8604$$

$$s1{,}2 = -2 \pm j3.8604$$

$$z1{,}2 = e^{s1,2.T} = \{0.8187 \pm j0.3082;\}$$

Además, comprobemos si el sistema es controlable:

$$M = \begin{pmatrix} 4.8 * 10^{-3} & 0.0138 \\ 0.0952 & 0.0861 \end{pmatrix}$$

$$detM \neq 0$$

El sistema es controlable

Calculemos la ecuación característica del sistema:

$$\big(z - (0.8187 + j0.3082)\big).\big(z - (0.8187 - j0.3082)\big) =$$

$$= z^2 + z(-1.6374) + (0.7652)$$

Luego:

$$|zI - G + HK| = z^2 + z(4.8 * 10^{-3}k1 + 0.0952k2 - 1.9048) + (4.27 * 10^{-3}k1 + (-0.0947)k2 + 0.9048)$$

Igualándolo con la ecuación anterior, se tiene:

$$k1 = 13.9744$$

$$k2 = 2.1042$$

Finalmente, la matriz de realimentación será:

$$k = (13.9744 \quad 2.1042)$$

Matriz de ganancia

P3: Del problema anterior, calcule la matriz de realimentación K para $\varepsilon = 1$ (amortiguamiento crítico) y una constante de tiempo $\tau = 1s$

Con los datos proporcionados, hallemos los polos deseados de la siguiente forma:

$$\varepsilon = 1$$

$$\tau = 1s$$

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon . wn}$$

$$wn = 1$$

$$\sigma = \varepsilon . wn = 1$$

$$w = wn\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0$$

$$s1,2 = \{-1; -1\}$$

$$z1,2 = e^{s1,2.T} = \{0.9048; 0.9048\}$$

Además, comprobemos si el sistema es controlable:

$$M = \begin{pmatrix} 4.8 * 10^{-3} & 0.0138 \\ 0.0952 & 0.0861 \end{pmatrix}$$

$$detM \neq 0$$

El sistema es controlable

Calculemos la ecuación característica del sistema:

$$\big(z - (0.9048)\big).\big(z - (0.9048)\big) =$$

$$= z^2 - z(1.8096) + (0.8186)$$

Luego:

$$|zI - G + HK| = z^2 + z(4.8 * 10^{-3}k1 + 0.0952k2 - 1.9048) + (4.27 * 10^{-3}k1 + (-0.0947)k2 + 0.9048)$$

Igualándolo con la ecuación anterior, se tiene:

$$k1 =$$

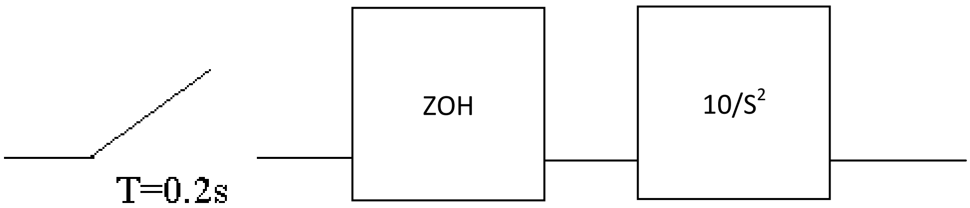
$$k2 =$$

Finalmente, la matriz de realimentación será:

$$k = (\qquad)$$

Matriz de ganancia

P4: Un satélite puede modelarse según la siguiente figura:



a) Desarrolle un modelo discreto en variables de estado

De la ecuación se tiene:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^2}$$

Aplicando L^{-1}:

$$\ddot{y} = 10u$$

$$y = x1$$

$$\dot{y} = \dot{x}1 = x2$$

$$\ddot{y} = \ddot{x}1 = \dot{x}2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}1 \\ \dot{x}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0)x$$

EE y E de salida en tiempo continuo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = 0$$

Ahora, se tiene lo siguiente:

$$G = \Phi(T) = L^{-1}((sI - A)^{-1})$$

$$H = \int_0^T \Phi(T)dT.B$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 10 * \frac{T^2}{2} \\ 10T \end{pmatrix}$$

$$Cd = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dd = 0$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(k)$$

EE y E de salida en tiempo discreto

b) Se desea diseñar un sistema de control a lazo abierto usando realimentación de estado. La ecuación característica es $p(z) = z^2 - 1.62z + 0.665$. **Encuentre el coeficiente de amortiguamiento y la constante de tiempo deseadas.**

Primero, comprobemos la CONTROLABILIDAD del sistema:

$$M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$detM \neq 0$$

El sistema es controlable

Ahora, los polos del sistema deseado (por condición del problema) son:

$$z1,2 = \{0.81 + j0.0943; 0.81 - 0.0943\}$$

Además: $T = 0.2$

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon . wn}$$

$$z1,2 = e^{-\varepsilon . wn . T} e^{\pm jwn . T\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$z1,2 = 0.81 \pm j0.0943$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{0.0943}{0.81}\right) = 0.1158$$

$$0.1158 = wn . T\sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$e^{-\varepsilon . wn . T} = e^{-\frac{T}{\tau}} = 0.8154$$

$$\tau = 0.9800s$$

$$\varepsilon = 0.9936$$

Coeficiente de amortiguamiento y la constante de tiempo deseadas

c) Encuentre la matriz de ganancias Kque realice la ecuación característica del punto b

Tenemos lo siguiente:

$$p(z) = z^2 - 1.62z + 0.665$$

Y además, se cumple lo siguiente:

$$|zI - G + HK|$$

Entonces reemplazando e igualando con la expresión anterior, se tiene:

$$|zI - G + HK| = \begin{vmatrix} z - 1 + 0.2k1 & -0.2 + 0.2k2 \\ 2k1 & z - 1 + 2k2 \end{vmatrix}$$

$$z^2 + z(0.2k1 + 2k2 - 2) + (0.2k1 - 2k2 + 1) = z^2 - 1.62z + 0.665$$

$$k1 = 0.1125$$

$$k2 = 0.17875$$

Finalmente se tiene:

$$K = (0.1125 \quad 0.17875)$$

Matriz de ganancia