SOLUCIONARIO PRIMERA PRÁCTICA CALIFICADA CONTROL DIGITAL

P1.- Sea el sistema definido por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\boldsymbol{x(k+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{x(k)} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u(k)}$$

$$\boldsymbol{y(k)} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{1}] \boldsymbol{x(k)}$$

a) Calcular la función de transferencia pulso del sistema

SOLUCION:

Teniendo en cuenta la siguiente definición y las matrices de entrada y salida de la ecuación de estado anterior, se tiene:

$$Gp(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = Cd(zI - G)^{-1}H + Dd$$

$$(zI - G)^{-1} = \frac{adj(zI - G)}{|zI - G|}$$

Operando adecuadamente:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(zI - G) = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 2 & z - 3 \end{bmatrix}$$

$$d(zI - G)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{z-3}{z(z-3)+2} & \dfrac{1}{z(z-3)+2} \\ \dfrac{-2}{z(z-3)+2} & \dfrac{z}{z(z-3)+2} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Dd = [0]$$

Reemplazando en la ecuación inicial y operando:

$$Gp(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

FUNCION DE TRANSFERENCIA PULSO DEL SISTEMA

b) Determinar la CONTROLABILIDAD y OBSERVABILIDAD del sistema

SOLUCION:

CONTROLABILIDAD: Para que un proceso sea completamente controlable se debe cumplir que el rango de la matriz de CONTROLABILIDAD M debe ser igual al orden del proceso, lo que implica que el determinante de la matriz M debe ser diferente de cero:

$$\det(M) = \det([H \quad GH]) \neq 0$$

Entonces:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = -1 \neq 0$$

EL SISTEMA ES COMPLETAMENTE CONTROLABLE

OBSERVABILIDAD: Para que un proceso sea completamente OBSERVABLE, el rango de la matriz de OBSERVABILIDAD N es igual al orden del proceso. Lo que implica que el determinante de la matriz N debe ser diferente de cero:

$$\det(N) = \det([Cd \quad CdG]^T) \neq 0$$

Entonces:

$$N = \left[\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right]$$

$$\det(N) = 2 \neq 0$$

EL SISTEMA ES COMPLETAMENTE OBSERVABLE

c) Calcular la respuesta del sistema ante una entrada escalón considerando un periodo de muestreo de $T = 0.1s$

SOLUCION:

Por definición se tiene:

$$u(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Gp(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$y(z) = u(z) * Gp(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^2-3z+2)}$$

Ordenando la expresión anterior por fracciones parciales, se tiene:

$$y(z) = \frac{4}{(z-1)} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{4}{(z-2)} + \frac{4}{(z-2)^2}$$

Multiplicando la expresión anterior por z se tiene:

$$zy(z) = \frac{4z}{(z-1)} + \frac{1z}{(z-1)^2} - \frac{4z}{(z-2)} + \frac{4z}{(z-2)^2}$$

Aplicando transformada inversa (Z^{-1}) y utilizando la tabla de transformadas, se llega a la siguiente expresión ($T = 0.1s$):

$$y(t+kT) = 4 + kT - 4(2)^{kT} + (2)^{kT} +$$

RESPUESTA DEL SISTEMA ANTE UN ESCALON UNIDAD

P2.- Calcular la transformada inversa Z de la función:

$$x(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

SOLUCION:

Acomodamos la expresión de la siguiente forma (por fracciones parciales):

$$x(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Multiplicando la expresión anterior por z se tiene:

$$zx(z) = \frac{2z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$$

Aplicando transformada inversa (Z^{-1}) y utilizando la tabla de transformadas, se llega a la siguiente expresión:

$$Z^{-1}[zx(z)] = Z^{-1}\left[\frac{2z}{z-2}\right] - Z^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]$$

$$x(t+kT) = 2 * (2)^{kT} - 1$$

TRANSFORMADA INVERSA DE $x(z)$

P3.- Dado un sistema continúo definido por la función de transferencia (Nota: considere tiempo de muestreo $T = 1s$):

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{1}{s(s+2)}}$$

a) Obtener las ecuaciones de estado del sistema continuo

SOLUCION:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s}$$

$$Y(s)(s^2 + 2s) = U(s)$$

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = u(t)$$

$$y = x1$$

$$\dot{y} = \dot{x}1 = x2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}2 = x3$$

Finalmente, ordenando para obtenerlo de forma matricial:

$$\dot{x}1 = 0x1 + 0x2 - \frac{1}{2}x3 + \frac{1}{2}u$$

$$\dot{x}2 = 0x1 - (2)x2 + 0x3 + u$$

$$\dot{x}3 = 0x1 + 0x2 + 0x3 + 0u$$

$$y = x1 + 0x2 + 0x3 + 0u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + 0u$$

ECUACION DE ESTADO DEL SISTEMA CONTINUO

b) La ecuación de estado discreto con retenedor de orden cero

SOLUCION:

Como tenemos la ecuación de estado representada de forma matricial (inciso anterior), aplicaremos el método de DISCRETIZACION directa para hallar la ecuación de espacio de estado en tiempo discreto:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

$$y(k) = Cdx(k) + Ddu(k)$$

$$G = AT + I$$

$$H = BT$$

Operando y reemplazando valores, se obtiene:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + 0u(k)$$

ECUACION DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO

c) La función de transferencia pulso

SOLUCION:

Conociendo la función de transferencia $G(s) = y(s)/u(s)$ de un sistema, la correspondiente función de transferencia pulso se determina de la relación:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = G(z) = (1 - z^{-1})Z(\frac{G(s)}{s})$$

Reemplazando en la expresión anterior y aplicando la transformada Z, se tiene:

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z(\frac{1}{s^2(s+2)})$$

Acomodando por fracciones parciales:

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z(-\frac{1}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s+2)})$$

$$G(z) = (1 - z^{-1})(-\frac{z}{4(z-1)} + \frac{Tz}{2(z-1)^2} + \frac{z}{4(z-e^{-2T})})$$

Por la condición $T = 1s$ finalmente se tiene:

$$G(z) = (1 - z^{-1})(-\frac{z}{4(z-1)} + \frac{z}{2(z-1)^2} + \frac{z}{4(z-e^{-2})})$$

FUNCION DE TRANSFERENCIA PULSO