UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

EXAMEN FINAL DE CONTROL III
CICLO: 2008-B

Profesor: M. SC., Ing. Raúl Benites S. **Fecha**: 16/12/08
Duración: 90 minutos

1. **(3p)** Dado un proceso representado por:

$$x(k+1) = -2x(k) + u(k)$$
$$y(k) = x(k)$$

Considerando que: Q = 1; R = 1, determine la ganancia del controlador óptimo proporcional en función de P.

a) K = -2P/(1+3P)
b) K = -6P/(1+4P)
c) K = -6P/(0.1+3P)
d) N. A.

2. **(3p)** Dada una planta representada por:

$$x_1(k+1) = -5x_1(k) + 3x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -2x_2(k) + u(k)$$
$$y(k) = x_1(k)$$

Considerando $\underline{Q} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $R = (1)$, determine la ganancia del controlador óptimo proporcional en función de los elementos de P.

3. **(4p)** Dado un proceso discreto, representado por:

$$x_1(k+1) = -2x_1(k) + x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -3x_2(k) + u(k)$$
$$y(k) = x_1(k)$$

Determine la ganancia K de un Controlador por Localización de Polos con ganancia de ajuste k_0 fuera del bucle de control (visto en clase), considerando que los polos deseados están localizados en 0.2

4. **(3p)** Para la planta de la pregunta (2), determine Ke en función de los elementos de Pe, considerando:

$$\underline{Q}_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_e = (0.01)$$

5. **(2p)** ¿Cuál es la ventaja de usar Control Optimo frente al Control por Localización de Polos? Fundamente su respuesta en forma concisa.

....
....
....

6. (2p) *Si se tiene un proceso tipo "0", ¿qué estrategia de Control Optimo se podría usar para tener una respuesta satisfactoria?* Fundamente su respuesta.

....
....
....

7. (3p) Al diseñar un Controlador Optimo, suponer que las matrices de ponderación Q y R son:

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R = (0.1)$$

¿Cómo responde la salida y(t) y cómo se comporta la señal de control u(t) en magnitud?. Fundamente su respuesta con claridad y en forma concisa.

AYUDA:

$$P(k+1) = Q + G^T P(k) G - G^T P(k) H [R + H^T P(k) H]^{-1} H^T P(k) G$$
$$K = [R + H^T P H]^{-1} H^T P G$$
$$P_e(k+1) = Q_e + G P_e(k) G^T - G P_e(k) C^T [R_e + C P_e(k) C^T]^{-1} C P_e(k) G^T$$
$$K_e = [R_e + C P_e C^T]^{-1} C P_e G^T$$
$$\widetilde{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ -CG & 1 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{H} = \begin{pmatrix} H \\ -CH \end{pmatrix}$$

$G=-2 \; ; H=1 \; ; C=1 \; ; Q=1 \; ; R=1$

$$K=\left[R+H^T P H\right]^{-1} H^T P G$$

$$K=(1+P)^{-1}P(-2) \Rightarrow \boxed{K=\frac{-2P}{1+P}}$$

3p

(2) $G=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix} \; ; H=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \; ; C=(1\;0) \; ; Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$R=(1)$

$$K=\left[1+(0\;1)\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}(0\;1)\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\left[1+(p_{12}\;p_{22})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]^{-1}(p_{12}\;p_{22})\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

3p

$$=\left[1+p_{22}\right]^{-1}(-5p_{12}\quad 3p_{12}-2p_{22})$$

$$\Rightarrow \boxed{K=\begin{pmatrix}\frac{-5p_{12}}{1+p_{22}} & \frac{3p_{12}-2p_{22}}{1+p_{22}}\end{pmatrix}}$$

4p

(3) $G=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix} \; ; H=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \; ; C=(1\;0)$

$$G-HK=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(K_1\;K_2)$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ K_1 & K_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -K_1 & -(3\end{pmatrix}$$

$$G-HK=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -K_1 & -(3+K_2)\end{pmatrix}$$

Posar:

* $(z-0.2)^2=z^2-0.4z+0.04=0 \longrightarrow (1)$

* $|zI-(G-HK)|=0$

$$\left|\begin{pmatrix}z & 0\\ 0 & z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -K_1 & -(3+K_2)\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}z+2 & -1\\ K_1 & z+(3+K_2)\end{vmatrix}=(z+2)\left[z+(3+K_2)\right]+K_1=0$$

$$=z^2+(5+K_2)z+(6+2K_2+K_1)=0 \longrightarrow (2)$$

$(1)=(2) \Rightarrow \begin{cases} 6+K_1+2K_2=0.04 \\ 5+K_2=-0.4 \Rightarrow K_2=-0.4-5 \Rightarrow \boxed{K_2=-5.4} \\ \rightarrow K_1=10.84-6 \Rightarrow \boxed{K_1=4.84}\end{cases}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

EXAMEN PARCIAL DE CONTROL DIGITAL
CICLO: 2010-V

Profesor: M. SC., Ing. Raúl Benites S.
Fecha: 05 / 02 / 2010
Duración: 100 minutos

Un proceso está modelado por:

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+2)}$$

Determine:

a) **(2 p)** La ecuación diferencial del proceso

b) **(4 p)** La ecuación de estado y de salida en tiempo discreto, asumiendo T = 0.1 segundo.

Para el sistema en tiempo continuo considere $x_1 = y(t)$, $x_2 = \frac{dy(t)}{dt}$.

c) **(3 p)** La función de transferencia pulso, considerando $G_p(s)$. Asuma T = 0.1 segundo.

d) **(1 p)** La estabilidad del proceso discretizado, considerando los resultados obtenidos en (c).

e) **(2 p)** La Controlabilidad y Observabilidad discretas.

f) **(2 p)** La 1era. Forma canónica controlable

g) **(2 p)** La 1era. Forma canónica observable

h) **(2 p)** La ecuación en diferencias, partiendo de los resultados obtenidos en (c)

i) **(2 p)** El diagrama de bloques detallado del proceso discreto obtenido en (b)

Solución Ex. Parcial

INGENIERÍA DE CONTROL I – Grupo 2

$$G_P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+2)}$$

a) Ecuac. Dif.

$$(s^2+2s)\,Y(s) = 10U(s) \Rightarrow s^2Y(s) + 2sY(s) = 10U(s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) = 10u(t)}$$ ✓ 3P

b) $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}(t)$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -2x_2 + 10u\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 10\end{pmatrix}}_{B}u\\ y &= \underbrace{(1 \quad 0)}_{C}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

En Continua.

Discret. Aproximada. Con $T = 0.1$ Seg.

$$G = I + TA = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0.1\\ 0 & -0.2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 0.8\end{pmatrix}$$

$$H = TB = 0.1\begin{pmatrix}0\\ 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 0.8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(k)\\ y(k) &= (1 \quad 0)\begin{pmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\end{pmatrix}\end{aligned}}$$ ✓ 4P

c) La func. transf. pulso, con $G_P(s)$, $T = 0.1$ Seg.

$$G_P(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = C(zI-G)^{-1}H + \cancel{D}^{=0} \; ; \; (zI-G) = \begin{pmatrix}z-1 & -0.1\\ 0 & z-0.8\end{pmatrix}$$

$$(zI-G)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix}z-0.8 & 0.1\\ 0 & z-1\end{pmatrix}}{(z-1)(z-0.8)} \Rightarrow G_P(z) = \frac{(1 \quad 0)\begin{pmatrix}z-0.8 & 0.1\\ 0 & z-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}{(z-1)(z-0.8)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_P(z) = \frac{0.1}{z^2 - 1.8z + 0.8}}$$ ✓ 3P

d) Estabilidad: de (c)

$(z-1)(z-0.8)=0 \Rightarrow$ Sist. estable. **1P**

e) Controlab. y observabil.

$M=[H \;\; GH] = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 1 & 0.8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M = 2 = n \Rightarrow$ Es C.C. **2P**

$N=[C^T \;\; G^T C^T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } N = 2 = n \Rightarrow$ Es C.O

c) ~~Función transferencia~~ pulso (F.T.P.)

$$\frac{y(z)}{u(z)} = G_p(z) = \frac{(z-1)}{z} \mathcal{Z}\left\{\frac{10}{s^2(s+2)}\right\} = \frac{(z-1)}{z}\mathcal{Z}\left[5\frac{1}{s^2} - \frac{5}{2}\frac{1}{s} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right]$$

$$\hookrightarrow G_p(z) = \frac{(z-1)}{z}\left\{5\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{5}{2}\cdot\frac{z}{(z-1)} + \frac{5}{2}\cdot\frac{z}{z-e^{-2T}}\right\}$$

Evaluando y reempl. T, tendremos:

$$\boxed{G_p(z) = \frac{0.0468z + 4.1374}{z^2 - 1.8187z + 0.8187}}$$

3P

f) 1ª forma canón. controlable:

de (c): $a_1 = -1.8187$; $a_2 = 0.8187$; $b_0 = 0$; $b_1 = 0.0468$; $b_2 = 4.1374$

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.8187 & 1.8187 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (4.1374 \;\; 0.0468)\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + (0)\,u(k)$$

2P

g) 1ª forma canónica observable:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.8187 \\ 1 & 1.8187 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.1374 \\ 0.0468 \end{pmatrix} u(k)$$

2P

$$y(k) = (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + (0)\,u(k)$$

h) Ecuac. en dif., partiendo de (c)

$$z^2 y(z) - 1.8187z\,y(z) + 0.8187\,y(z) = 0.0468z\,u(z) + 4.1374\,u(z)$$

$$\boxed{y(k+2) - 1.8187\,y(k+1) + 0.8187\,y(k) = 0.0468\,u(k+1) + 4.1374\,u(k)}$$

2P

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

EXAMEN PARCIAL DE CONTROL III
Ciclo: 2008-A

Profesor: M. SC., Ing. Raúl Benites S.
Fecha: 19 / 06 / 2008
Duración: 110 minutos

1 Dado un proceso representado por:

$$\dot{x}_1 = -0.6x_1 + 0.2e$$
$$\dot{x}_2 = 10x_1 - 10x_2$$
$$\dot{x}_3 = x_2$$
$$y = x_3$$

Determinar:
a) El equivalente modelo matricial en tiempo discreto, considerando un periodo de muestreo de 0.01 segundo. Use el método aproximado. (3 p)
b) La controlabilidad del modelo discreto. (2 p)
c) La estabilidad de tiempo discreto. (2 p)
d) La función de transferencia pulso. (3 p)

2. Una planta está representada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\ddot{\theta}(t) + 3\dot{\theta}(t) = \ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + u(t)$$

Determine:
a) La función de transferencia G(s) = Y(s)/U(s). (2 p)
b) La función de transferencia pulso G(z) = Y(z)/U(z). Considere T = 0.1 s. (3 p)
c) La forma canónica controlable del proceso discreto. (2 p)

3. La función de transferencia pulso de un proceso es G(z) = 2/(z+4), determine:
a) La ecuación de diferencias del proceso. (2 p)
b) La ecuación de estado discreto, considerando para tal efecto, que x(k) = y(k) (1 p)

AYUDA:

	f(t)	F(s)	f(kT) o f(k)	F(z)
1	1(t) o $\mu(t)$	$\frac{1}{s}$	1(k) o $\mu(k)$	$\frac{z}{z-1}$
2	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	t^2	$\frac{2}{s^3}$	$(kT)^2$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$

Solucionario

EX. parcial de Control III - ciclo: 2008A

(1)
$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.6 & 0 & 0\\ 10 & -10 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}e_f$$

$$y=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

a) $x(k+1)=\underbrace{(I+TA)}_{G}x(k)+\underbrace{TB}_{H}u(k)$; $T=0.01$ seg

3p

$$\underbrace{I+TA}_{\mathbf{G}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.006 & 0 & 0\\ 0.1 & -0.1 & 0\\ 0 & 0.01 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.994 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.01 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{TB}_{\mathbf{H}}=\begin{pmatrix}0.002\\ 0\\ 0\end{pmatrix};\ C_d=C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ D_d=D=[0]$$

b) $$M=\begin{bmatrix}H & GH & G^2H\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0.002 & +0.002 & 0.002\\ 0 & 0.0002 & 0.0004\\ 0 & 0.0000 & 0.000002\end{pmatrix}$$

2p Rango $M=3=n \Rightarrow$ ES C.C.

c) $|zI-G|=0$

2p $\rightarrow z_1=1$; $z_2=0.9$; $z_3=0.994 \Rightarrow$ EL SIST. ES ESTABLE

d) f.T.P. : $G(z)=C(zI-G)^{-1}H$

3p
$$\boxed{G(z)=\frac{2\times10^{-6}}{z^3-2.894z^2+2.7886z-0.8946}}$$

② $\ddot{\theta}(t)+3\dot{\theta}(t)=\ddot{u}(t)+4\dot{u}(t)+u(t)$

a) $s^2\theta(s)+3s\theta(s)=s^2U(s)+4sU(s)+U(s)$

$(s^2+3s)\theta(s)=(s^2+4s+1)U(s)$

2P

$\underset{Y(s)}{\uparrow}$

$$\Rightarrow \boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+4s+1}{s^2+3s}}$$

b) $G(z)=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right]=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{s^2+4s+1}{s^2[s+3]}\right]$

$G(z)=\frac{z-1}{z}\mathcal{Z}\left[\frac{11/9}{s}+\frac{1/3}{s^2}+\frac{-2/9}{s+3}\right]$

3P

$G(z)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{11}{9}\cdot\frac{z}{z-1}+\frac{1}{3}\times\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{2}{9}\times\frac{z}{z-e^{-3T}}\right]$

Para $T=0.1$ sg

$G(z)=\frac{z-1}{z}\left[\frac{11}{9}\times\frac{z}{(z-1)}+\frac{1}{30}\times\frac{z}{(z-1)^2}-\frac{2}{9}\times\frac{z}{(z-0.74)}\right]$

$$\boxed{G(z)=\frac{11}{9}+\frac{1}{30}\times\frac{1}{(z-1)}-\frac{2}{9}\times\frac{(z-1)}{(z-0.74)}}$$

ó

$$\boxed{G(z)=1.2222+\frac{0.0333}{(z-1)}-0.2222\frac{(z-1)}{(z-0.74)}}$$

ó

$$\boxed{G(z)=\frac{z^2-1.6489z+0.6576}{z^2-1.74z+0.74}}$$

ó

$$\boxed{G(z)\approx\frac{z^2-1.65z+0.66}{z^2-1.74z+0.74}}$$

3P

3P

3P

c) Forma Canónica Controlable Discreto: G(z) es de la forma:

$$G(z) = \frac{z^2 + (-1.65)z + 0.66}{z^2 + (-1.74)z + 0.74} = \frac{z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Donde: $b_1 = -1.65$; $b_2 = 0.66$; $b_0 = 1$

$a_1 = -1.74$; $a_2 = 0.74$; $a_0 = 1$

2p

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.74 & 1.74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)}$$ ✓

$$y(k) = \begin{pmatrix} b_2 - a_2 b_0 & b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + b_0 u(k)$$

$$\boxed{y(k) = \begin{pmatrix} -0.08 & 0.09 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + (1)\, u(k)}$$ ✓

3) $G(z) = \dfrac{z}{(z+4)}$

a) Ecuación en diferencias del proceso:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{(z+4)} \rightarrow (z+4)Y(z) = z U(z)$$

2p

$$zy(z) + 4y(z) = zu(z)$$

$$\boxed{y(k+1) + 4y(k) = u(k+1)}$$ ✓

b) Ec. estado discreto, siendo $x(k) = y(k)$

$$x(k+1) + 4x(k) = u(k+1)$$

1p $\Rightarrow \boxed{x(k+1) = -4x(k) + u(k+1)}$ ✓

c) Forma canónica controlable discreto: G(z) es de la forma:

$$G(z) = \frac{z^2+(-1.65)z+0.66}{z^2+(-1.74)z+0.74} = \frac{z^2+b_1 z+b_2}{z^2+a_1 z+a_2}$$

Donde: $b_1=-1.65$; $b_2=0.66$; $b_0=1$

$a_1=-1.74$; $a_2=0.74$; $a_0=1$

2p

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.74 & 1.74 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)}$$ ✓

$$y(k) = \begin{pmatrix} b_2-a_2 b_0 & b_1-a_1 b_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + b_0\, u(k)$$

$$\boxed{y(k) = \begin{pmatrix} -0.08 & 0.09 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + (1)\, u(k)}$$ ✓

(3) $G(z) = \frac{z}{(z+4)}$

a) Ecuación en diferencias del proceso:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{(z+4)} \rightarrow (z+4)Y(z) = zU(z)$$

2p

$$zY(z)+4Y(z) = zU(z)$$

$$\boxed{y(k+1)+4y(k) = u(k+1)}$$ ✓

b) Ec. estado discreto, siendo $x(k)=y(k)$

$$x(k+1)+4x(k) = u(k+1)$$

1p

$$\rightarrow \boxed{x(k+1) = -4x(k)+u(k+1)}$$ ✓

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

XVII PROGRAMA DE ACTUALIZACION PROFESIONAL DE INGENIERIA ELECTRONICA

EXÁMEN PARCIAL
CURSO: CONTROL DIGITAL

Profesor: M. SC., Ing. Raúl Benites Saravia
Fecha: 08 / 08 / 2010
Duración: 110 minutos

1. La Figura 1 muestra una habitación climatizada por un calentador eléctrico. La temperatura dentro de la habitación es T_r y las paredes están a una temperatura T_w.

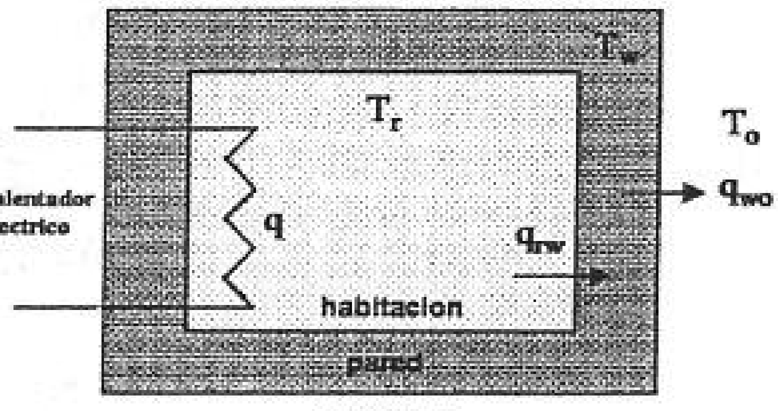


Figura 1: Sistema Térmico Simple

Si la temperatura fuera del sistema es T_o, el modelo del sistema térmico que relaciona el flujo de calor suministrado q y la temperatura del cuarto T_r es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{T}_r \\ \dot{T}_w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_r C_r} & \frac{1}{R_w C_r} \\ \frac{1}{R_r C_w} & -\frac{1}{C_w}\left(\frac{1}{R_r}+\frac{1}{R_w}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T_w \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} q/C_r \\ T_o/C_w R_w \end{bmatrix} \mu$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T_w \end{pmatrix} + (0)\mu$$

Los parámetros que caracterizan al sistema térmico físicamente son los siguientes:

- Capacidad calorífica del H_2O (C_r) 1000 kcal/m^{3}°C
- Capacidad calorífica del Acero galvanizado (C_w) 950 kcal/m^3 °C
- Resistencia térmica del H_2O (R_r) 0.24 m^{2}°Cs/Kcal
- Resist. térmica del Acero Galvanizado (R_w) (2 cm de espesor) 1.67 m^{2}°Cs/Kcal
- El flujo de calor necesario para calentar el agua q = 1200 Kcal
- Temperatura fuera de la terma deseada To = 35 °C

Determine:

a) **(4 ptos.)** Las matrices del modelo discretizado G, H, C y D del proceso térmico, considerando los parámetros dados. Considere un periodo de muestreo de 1 segundo.

b) **(5 ptos.)** Los parámetros de un Controlador por Localización de Polos Discreto, ante una entrada de referencia escalón, considerando un factor de amortiguamiento de 1 y un tiempo de establecimiento de 600 segundos. Use el esquema del regulador con ganancia de ajuste k_o. ← REGULA DET. K $\mu_1 = \mu_2 = C$

c) **(1 ptos.)** El diagrama de bloques detallado del sistema de control en lazo cerrado, considerando
los parámetros del controlador diseñado en la parte (b).

2. Sea un motor DC controlado por campo, cuyo modelo en espacio de estado es:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ \frac{K}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e_f$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Considerando las siguientes variables de estado: $x_1 = i_f$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \omega_m$, y los siguientes datos:

$$R_f = 3\Omega; L_f = 5H; b = 0.1Nms; J = 0.01Kgm^2/s^2; K = 0.1Nm/A$$

Determine:

a) El modelo en tiempo discreto, considerando un periodo de muestreo de 0.01 segundos (aplique discretización directa). **(4 puntos)**

b) Verifique si el modelo discretizado es completamente controlable **(1 punto)**

c) Verifique si el modelo discretizado es completamente observable **(1 punto)**

3. **(4p)** Dado un proceso discreto, representado por:

$$x_1(k+1) = -2x_1(k) + x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -3x_2(k) + u(k)$$
$$y(k) = x_1(k)$$

Determine la ganancia **K** de un Controlador por Localización de Polos con ganancia de ajuste ~~k_o~~ fuera del bucle de control (visto en clase), considerando que los polos deseados están localizados en 0.2

↳ Solo DET. K

EXAMEN PARCIAL - UNAC

CONTROL DIGITAL - XVII PROPEDÉUTICO

Solucionario

1(2014-3)-I.E

(1)
$$\begin{pmatrix} \dot{T}_r \\ \dot{T}_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0042 & 0.0006 \\ 0.0044 & -0.005 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_r \\ T_w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.0221 \end{pmatrix} u$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} T_r \\ T_w \end{pmatrix}$$

a) G, H, C_d, D_d , $T = 1$ seg.

$$G = I + TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.0042 & 0.0006 \\ 0.0044 & -0.005 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9958 & 0.0006 \\ 0.0044 & 0.9950 \end{pmatrix}$$

$$H = TB = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.0221 \end{pmatrix} \; ; \; C_d = C \; , \; D_d = D$$

4 PUNTOS

b) Local. Polos : K

$\mu_1 = \mu_2 = 0.3$

Ecuac. Caract. deseada:

$$(z-\mu_1)(z-\mu_2) = (z-0.3)^2 = z^2 - 0.6z + 0.09 = 0 \longrightarrow (I)$$

Ecuac. Caract. de lazo cerrado, considerando K

$$|zI - (G - HK)| = 0$$

$$G - HK = \begin{pmatrix} 0.9958 & 0.0006 \\ 0.0044 & 0.9950 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.0221 \end{pmatrix} (K_1 \; K_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9958 & 0.0006 \\ 0.0044 & 0.9950 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1.2K_1 & 1.2K_2 \\ 0.0221K_1 & 0.0221K_2 \end{pmatrix}$$

$$G - HK = \begin{pmatrix} 0.9958 - 1.2K_1 & 0.0006 - 1.2K_2 \\ 0.0044 - 0.0221K_1 & 0.9950 - 0.0221K_2 \end{pmatrix}$$

$$|[zI - (G - HK)]| = \begin{vmatrix} z - (0.9958 - 1.2K_1) & 1.2K_2 - 0.0006 \\ 0.0221K_1 - 0.0044 & z - (0.9950 - 0.0221K_2) \end{vmatrix}$$

$|zI-(G-HK)| = 0$

$z^2-(1.9908-0.0221K_2-1.2K_1)z+(1.0173-1.1940K_1-0.0273K_2+0.0265K_1K_2$ [redacted] $) = 0 \longrightarrow (2)$

Det. K:

Igualando coef. de (1) y (2):

$1.9908-0.0221K_2-1.2K_1 = 0.6$

$1.0173-1.1940K_1-0.0273K_2+0.0265K_1K_2 = 0.09$

$K_1 = 1.1590-0.0184K_2 \longrightarrow (\alpha)$

$-0.3358-0.0058K_2 = 0.09 \longrightarrow K_2 = -73.4138$

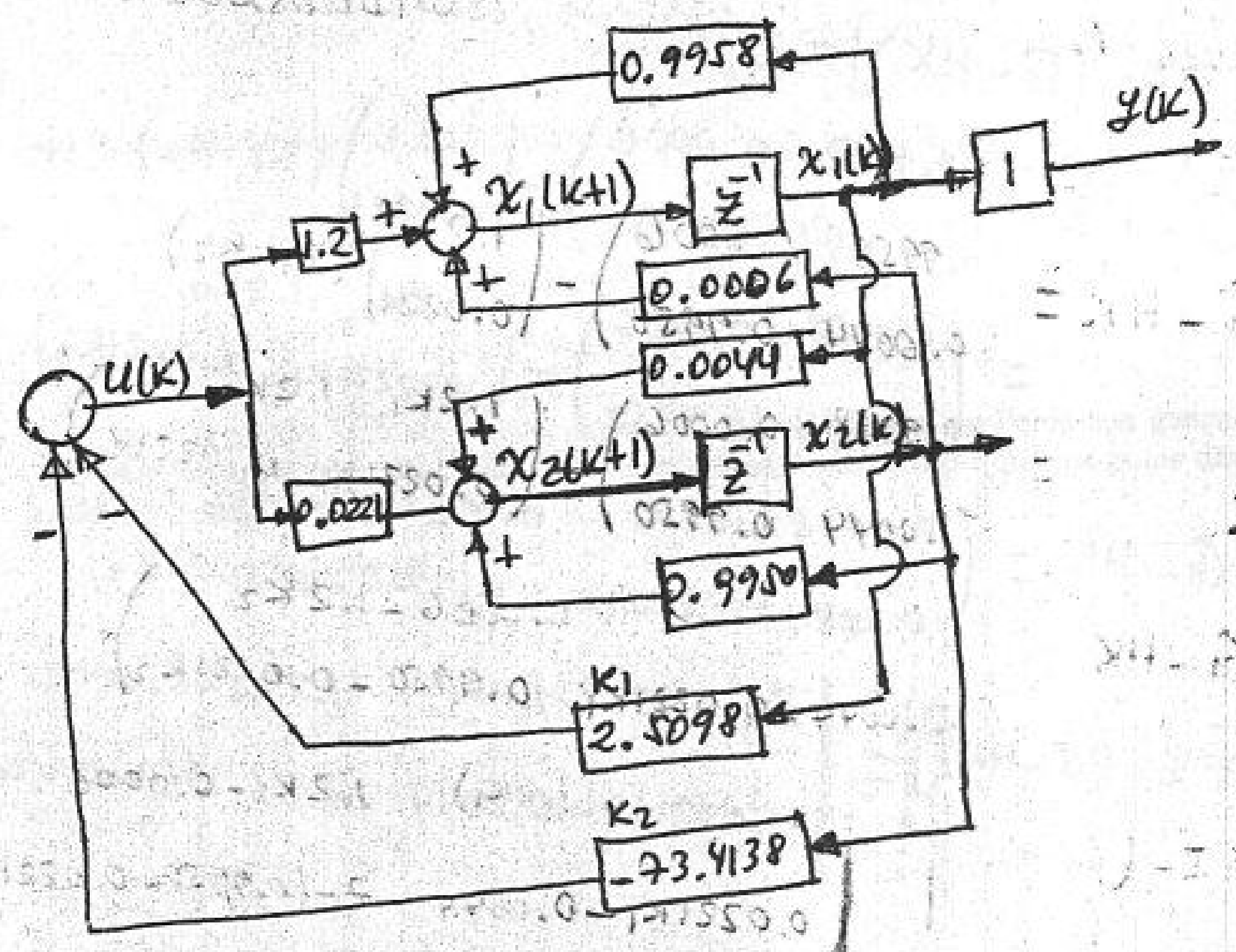
Reemp. K_2 en (α):

$K_1 = 1.159-0.0184(-73.4138) \rightarrow K_1 = 2.5098$

5 Puntos

$\Rightarrow \boxed{K = [2.5098 \quad -73.4138]}$

c)



1 Punto

(2)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0.6 & 0 & 0\\ 10 & -10 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.2\\ 0\\ 0\end{pmatrix} e_f$$

$$y = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

a) MODELO EN TIEMPO DISCRETO. $T = 0.01$ Sg.

$$G = I + TA = \begin{pmatrix}0.994 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.01 & 1\end{pmatrix} \; ; \; H = TB = \begin{pmatrix}0.002\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_3(k+1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.994 & 0 & 0\\ 0.1 & 0.9 & 0\\ 0 & 0.01 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0.002\\ 0\\ 0\end{pmatrix} e_f(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(k)\\ x_2(k)\\ x_3(k)\end{pmatrix}$$

4 PUNTOS

b) CONTROLABILIDAD

$$M = \left[H \;\; GH \;\; G^2H\right] = \begin{pmatrix}0.002 & 0.002 & 0.002\\ 0 & 0.0002 & 0.0004\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Rango $M = 3 = n \Rightarrow$ ES C.C.

1 PUNTO

c) OBSERVABILIDAD

$$N = \begin{pmatrix}C\\ CA\\ CA^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 10 & -10 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango } N = 3 = n \Rightarrow \text{ES C.O.}$$

1 PUNTO

(3) DET. K:

$x_1(k+1) = -2x_1(k) + x_2(k)$

$x_2(k+1) = -3x_2(k) + u(k)$

$y(k) = x_1(k)$

$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}; H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

PASOS DE DISEÑO:

* ECUAC. CARACT. DESEADA:

$(z-0.2)^2 = z^2 - 0.4z + 0.04 = 0 \longrightarrow (1)$

* ECUAC. CARACT. DE L.C., CONSIDERANDO K:

$|zI - (G - HK)| = 0$

$\hookrightarrow z^2 + (5+k_2)z + (6+2k_2) + k_1 = 0 \longrightarrow (2)$

* DET. K:

IGUALANDO COEF. DE (1) y (2)

$6 + k_1 + 2k_2 = 0.04$

$5 + k_2 = -0.4 \Rightarrow \underline{k_2 = -5.4}$

$\Rightarrow k_1 = 10.84 - 6 \Rightarrow \underline{k_1 = 4.8}$

$\Rightarrow \boxed{K = [4.8 \quad -5.4]}$

4 Puntos

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRONICA Y ELECTRICA

2º Pract. Calificada

~~EXAMEN FINAL~~

INGENIERÍA DE CONTROL I

Ciclo: 2011-O

Profesor: M. SC., Ing. Raúl Benites S. Fecha: 25 / 02 / 2011

Duración: 90 minutos

1. Un proceso está modelado por:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & -0.7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Determine:

a) **(5 p)** La matriz ganancia del controlador (K), considerando que los polos de lazo cerrado son: $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$

b) **(5 p)** Si el sistema de control diseñado en (b) permite obtener error estacionario nulo, es decir si la salida es igual a la referencia en tiempo estacionario. Considere una referencia escalón de dos unidades. En caso de que no se logre error estacionario nulo, entonces determine el valor de la ganancia k_o fuera de bucle de control, que permita obtener que la salida sea igual a la referencia.

2. **(5 p)** Dado el modelo discreto:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9958 & 0.0006 \\ 0.0044 & 0.9950 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.0221 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + (0)u(k)$$

Determine la matriz ganancia de un Controlador por Localización de `polos, considerando $\mu_{1,2} = 0.3$

3. **(5 p)** Dado un proceso representado por:

$$x_1(k+1) = -5x_1(k) + x_2(k) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = -3x_1(k) - 2x_2(k)$$
$$y(k) = x_2(k)$$

Determinar la matriz de ganancia del Controlador Optimo Proporcional en función de los elementos de P, considerando las siguientes matrices de ponderación:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R = (0.1);$$

AYUDA:

$$K = [R + H^T P H]^{-1} H^T P G$$

UNMSM – Solución
2ª Práctica Calificada
Ciclo: 2011-0

(1) $G = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & -0.7 \end{pmatrix}$; $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$; $C = (1 \quad 0)$

a) $K = ?$, $\mu_1 = \mu_2 = 0.2$

* $(z-\mu_1)(z-\mu_2) = (z-0.2)^2 = z^2 - 0.4z + 0.04 = 0 \longrightarrow (I)$

* $|zI - (G - HK)| = 0$

$(G-HK) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & -0.7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}(k_1 \ k_2) = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & -0.7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ 0.5k_1 & 0.5k_2 \end{pmatrix}$

$(G-HK) = \begin{pmatrix} 0.2-k_1 & 0.5-k_2 \\ -0.5k_1 & -(0.7+0.5k_2) \end{pmatrix}$

$|zI - (G-HK)| = \left| \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2-k_1 & 0.5-k_2 \\ -0.5k_1 & -(0.7+0.5k_2) \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} z-(0.2-k_1) & k_2-0.5 \\ 0.5k_1 & z+(0.7+0.5k_2) \end{vmatrix}$

$[z-(0.2-k_1)][z+(0.7+0.5k_2)] - 0.5k_1(k_2-0.5) = 0$

$z^2 + (0.5+0.5k_2+k_1)z + (0.95k_1 - 0.1k_2 - 0.14) = 0 \longrightarrow (II)$

$(I) = (II)$

$0.5 + 0.5k_2 + k_1 = -0.4 \longrightarrow k_1 = -0.9 - 0.5k_2$

$0.95k_1 - 0.1k_2 - 0.14 = 0.04 \rightarrow -0.1k_2 = 1.035 + 0.475k_2$

$k_2 = \frac{-1.035}{0.575} \Rightarrow \boxed{k_2 = -1.8}$

Entonces

$k_1 = -0.9 - 0.5(-1.8) \Rightarrow \boxed{k_1 = 0}$

$\Rightarrow \boxed{K = [0 \quad -1.8]}$

(5P)

b) $r = 2$

$$|zI - G| = \left| \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & -0.7 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} z-0.2 & -0.5 \\ 0 & z+0.7 \end{vmatrix} = (z-0.2)(z+0.7) = 0$$

NO TIENE INTEGRADOR

$\Rightarrow e_{ss} \neq 0$

Luego, calculamos K_0, veamos:

$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \longrightarrow (1)$

$y(k) = Cx(k) \longrightarrow (2)$

$u(k) = -Kx(k) + K_0 r(k) \longrightarrow (3)$

(3) en (1):

$x(k+1) = Gx(k) + H[-Kx(k) + K_0 r(k)]$

$x(k+1) = (G - HK)x(k) + HK_0 r(k) \longrightarrow (4)$

$\Rightarrow zX(z) = (G-HK)X(z) + HK_0R(z)$

$[zI-(G-HK)]X(z) = HK_0R(z) \Rightarrow X(z) = [zI-(G-HK)]^{-1} HK_0R(z)$

$y(z) = C[zI-(G-HK)]^{-1} HK_0R(z)$.

$$[zI-(G-HK)] = \begin{pmatrix} z-0.2 & -2.3 \\ 0 & z-0.2 \end{pmatrix} \rightarrow [zI-(G-HK)]^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} z-0.2 & +2.3 \\ 0 & z-0.2 \end{pmatrix}}{(z-0.2)^2}$$

5P

$$y(z) = \frac{(1 \;\; 0) \begin{pmatrix} z-0.2 & 2.3 \\ 0 & z-0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2K_0 \\ K_0 \end{pmatrix} z}{(z^2-0.4z+0.04)(z-1)}$$

$$y_{ss} = \lim_{z\to 1} \cancel{\frac{z-1}{z}} \frac{(1 \;\; 0) \begin{pmatrix} z-0.2 & 2.3 \\ 0 & z-0.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2K_0 \\ K_0 \end{pmatrix} \cancel{\frac{z}{z-1}}}{(z^2-0.4z+0.04)} \overset{z\to 1}{=} \lim \frac{(z-0.2 \;\; 2.3) \begin{pmatrix} 2K_0 \\ K_0 \end{pmatrix}}{(z^2-0.4z+0.04)} = 2$$

$$y_{ss} = \lim_{z\to 1} \frac{[2(z-0.2)+2.3]K_0}{(z^2-0.4z+0.04)} = \frac{3.9K_0}{0.64} = 2 \rightarrow K_0 = \frac{2 \times 0.64}{3.9} = \frac{0.64}{1.95}$$

$\boxed{K_0 = 0.328}$

(2) $\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9958 & 0.0006 \\ 0.0044 & 0.9950 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.0221 \end{pmatrix} u(k)$

$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + (0)\, u(k)$

$\mu_1 = \mu_2 = 0.3$

$(z-\mu_1)(z-\mu_2) = (z-0.3)^2 = z^2 - 0.6z + 0.09 = 0 \longrightarrow (\mathrm{I})$

$|zI - (G-HK)| = 0$

$G-HK = \begin{pmatrix} 0.9958 - 1.2K_1 & 0.0006 - 1.2K_2 \\ 0.0044 - 0.0221K_1 & 0.9950 - 0.0221K_2 \end{pmatrix}$

$|zI-(G-HK)| = z^2 - (1.9908 - 0.0221K_2 - 1.2K_1)z + (1.0173 - 1.1940K_1 - 0.0273K_2 + 0.0265K_1K_2 = 0 \to (\mathrm{II})$

$1.9908 - 0.0221K_2 - 1.2K_1 = 0.6 \to K_1 = 1.1590 - 0.0184K_2 \to (\alpha)$

$1.0173 - 1.1940K_1 - 0.0273K_2 + 0.0265K_1K_2 = 0.09$

$-0.3358 - 0.0058K_2 = 0.09 \Rightarrow \underline{K_2 = -73.4138} \to$ REEMP. EN (α).

$\underline{K_1 = 2.5098}$, Luego: $\boxed{K = [2.5098 \;\; -73.4138]}$ (5P)

(3) $G = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$; $H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = (0)$

$[R + H^T P H] = \left[0.1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \left[0.1 + \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$[R + H^T P H] = [0.1 + p_{11}]$; $H^T P G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5p_{11} - 3p_{12} & p_{11} - 2p_{12} \end{pmatrix}$

$K = \dfrac{\begin{pmatrix} -5p_{11} - 3p_{12} & p_{11} - 2p_{12} \end{pmatrix}}{0.1 + p_{11}}$

o' $\boxed{K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-5p_{11} - 3p_{12}}{0.1 + p_{11}} & \dfrac{p_{11} - 2p_{12}}{0.1 + p_{11}} \end{pmatrix}}$ (5P)