UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

EXAMEN SUSTITUTORIO
TEORIA DE CAMPOS ELECTROMAGNETICOS
2009 - V

1.- Se tiene una esfera de radio A, centrada en el origen, compuesta de un material con una polarización dada por $P = A(\rho\hat{\rho} + z\hat{z})$ Hallar el potencial y campo eléctrico.

2.- Se tiene un anillo de hilo metálico y de radio A, centrado en el plano XY y tiene una densidad de carga lineal

$$\lambda = \lambda_0(1 - \cos\phi)$$

Se pide calcular el momento monopolar, momento dipolar y momento cuadripolar.

3.- Una esfera metálica de radio A se encuentra aislada y almacena una carga Q. La esfera se encuentra en el vacio, hallar:
a) la energía almacenada en el sistema
b) suponga que sin descargar la esfera, esta se recubre con una capa de espesor a de un dieléctrico de permitividad ε. Determine la nueva energía almacenada en el sistema
c) Si en lugar de una esfera aislada y descargada tenemos una esfera conectada a un generador que fija su potencial en un valor V_0, cual es el valor de la energía antes y después.

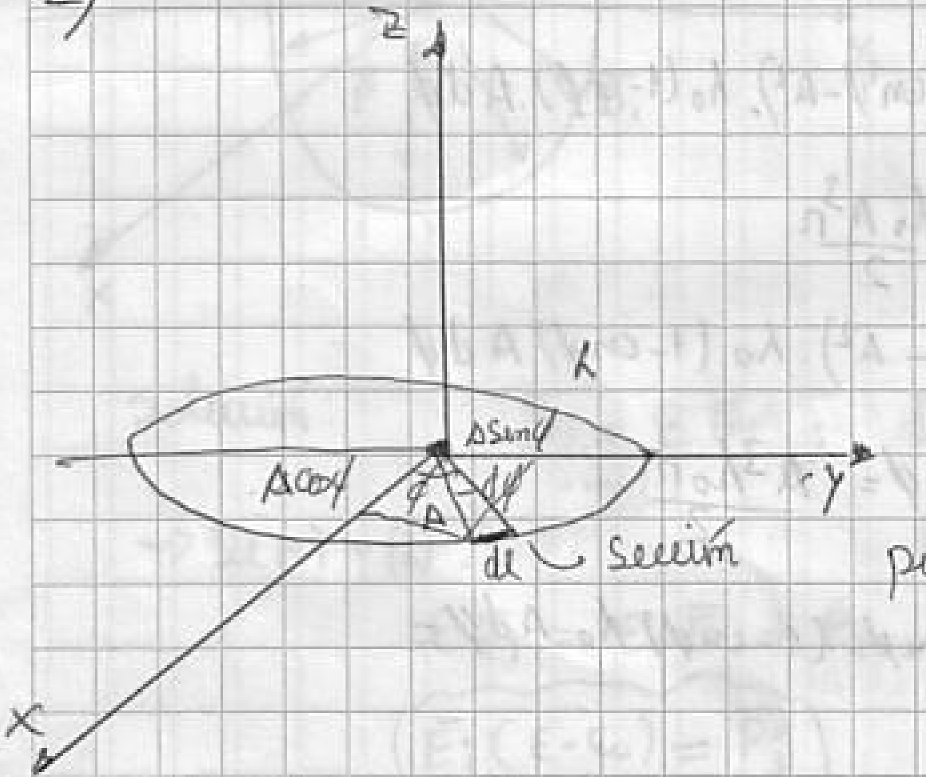
4.- Se tiene una esfera conductora de radio A conectada a tierra. Sobre una superficie esférica de radio d concéntrica con la anterior se distribuye una carga superficial σ, calcular el campo eléctrico para todo el espacio.

Examen Sustitutorio de Teoría de campos electromagnéticos

Alumno: Lope Chappa Gonzalo 011
Código: 060047D

11

2)



posición $\bar{r} = (A\cos\phi, A\sin\phi, 0)$

a) Momento monopolar:

$$Q_T = \int dq = \int \lambda\, dl = \int_0^{2\pi} \lambda_0 (1-\cos\phi)\, A\, d\phi = \lambda_0 A \int_0^{2\pi} (1-\cos\phi)\, d\phi$$

$$Q_T = \lambda_0 A \left[\int_0^{2\pi} d\phi - \int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi\right] = \lambda_0 A \left[2\pi - \cancel{\sin\phi \Big|_0^{2\pi}}\right] = \lambda_0 2\pi A$$

b) Momento dipolar:

4

$$\bar{p} = \int \bar{r} \cdot dq \Rightarrow \bar{r} = (A\cos\phi\, \hat{\imath} + A\sin\phi\, \hat{\jmath} + 0\hat{u}) = (A\cos\phi, A\sin\phi, 0)$$

$$\Rightarrow \bar{p} = \int (A\cos\phi\, \hat{\imath} + A\sin\phi\, \hat{\jmath} + 0\hat{k})\, \lambda\, dl = \int_0^{2\pi} (A\cos\phi, A\sin\phi, 0)\, \lambda_0 (1-\cos\phi)\, d\phi$$

$$\bar{p} = \int_0^{2\pi} A\cos\phi\, \lambda_0 (1-\cos\phi)\, d\phi + \int_0^{2\pi} A\sin\phi\, \lambda_0 (1-\cos\phi)\, d\phi + \int_0^{2\pi} 0$$

$$\bar{p} = A\lambda_0 \int_0^{2\pi} \cos\phi (1-\cos\phi)\, d\phi\, \hat{\imath} + A\lambda_0 \int_0^{2\pi} \sin\phi (1-\cos\phi)\, d\phi\, \hat{\jmath}$$

$$\bar{p} = A\lambda_0 \left[\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi - \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi\right] \hat{\imath} + A\lambda_0 \left[\int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi - \int_0^{2\pi} \sin\phi \cos\phi\, d\phi\right] \hat{\jmath}$$

$$\bar{p} = A\lambda_0 \left[\cancel{\sin\phi \Big|_0^{2\pi}} - \pi\right] \hat{\imath} + A\lambda_0 \left[-\cos\phi \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2\phi\, d\phi\right] \hat{\jmath}$$

$$\bar{p} = A\lambda_0 (-\pi)\hat{\imath} + A\lambda_0 [0 - 0]\hat{\jmath} = -A\pi\lambda_0\, \hat{\imath}$$

c) Momento cuadripolar:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} Q_{xy} = Q_{yx} \\ Q_{xz} = Q_{zx} \\ Q_{yz} = Q_{zy} \end{array}$$

$$Q_{xx} = \frac{1}{2}\int (3x'^2 - r'^2)\,dq'$$

$$= \frac{1}{2}\int (3A^2\cos^2\phi - A^2).\,\lambda\,dl = \frac{1}{2}\int (3A^2\cos^2\phi - A^2).\,\lambda_0(1-\cos\phi).A\,d\phi$$

$$= \frac{\lambda_0 A}{2}\int (3A^2\cos^2\phi - A^2)(1-\cos\phi)\,d\phi = \frac{\lambda_0 A^3 \pi}{2}$$

$$Q_{yy} = \frac{1}{2}\int (3y'^2 - r'^2)\,dq' = \frac{1}{2}\int (3A^2\sin^2\phi - A^2).\,\lambda_0(1-\cos\phi)A\,d\phi$$

$$= \frac{1}{2}A^3\lambda_0 \int (3\sin^2\phi - 1)(1-\cos\phi)\,d\phi = \frac{A^3\lambda_0\pi}{2}$$

$$Q_{xy} = \frac{1}{2}\int 3x'y'\,dq' = \frac{1}{2}\int 3.A^2\cos\phi\sin\phi.\,(1-\cos\phi)\lambda_0\,A\,d\phi =$$

$$= \frac{3A^2\lambda_0}{2}\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi\,(1-\cos\phi)\,d\phi$$

$$= \frac{3A^2\lambda_0}{2}\left[\int_0^{2\pi}\cos\phi\sin\phi\,d\phi - \int_0^{2\pi}\cos^2\phi\sin\phi\,d\phi\right] = 0$$

$$Q_{xz} = \frac{1}{2}\int 3x'z'\,dq' = 0 \;;\; z' = 0$$

$$Q_{yz} = \frac{1}{2}\int 3y'z'\,dq' = 0 \;;\; z' = 0$$

Además: $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$

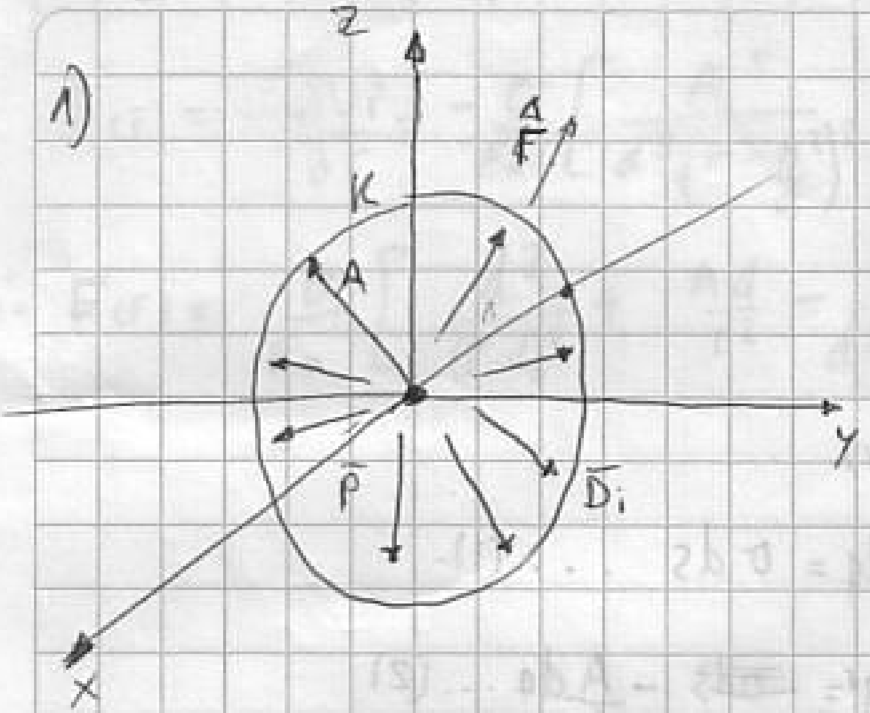
$$Q_{zz} = -Q_{xx} - Q_{yy}$$

$$Q_{zz} = -\frac{A^3\pi\lambda_0}{2} - \frac{A^3\pi\lambda_0}{2} = -A^3\pi\lambda_0$$

⇒ Momento cuadripolar:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_0 A^3\pi}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{A^3\lambda_0\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{A^3\lambda_0\pi}{\cancel{2}} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_0 A^3\pi}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1)



Solución: $\bar{D}_i = \varepsilon \bar{E}_i \; \ldots (1)$; $\bar{D}_i = \varepsilon_0 \bar{E}_i + \bar{P}_i \ldots (2)$

$\Rightarrow$ De (1) y (2):

$$\varepsilon \bar{E}_i = \varepsilon_0 \bar{E}_i + \bar{P}_i$$

$$\bar{E}_i (\varepsilon - \varepsilon_0) = \bar{P}_i$$

$$\bar{P}_i = A\rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{E}_i = \frac{\bar{P}_i}{\varepsilon - \varepsilon_0} = \frac{A\rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{z}}{\varepsilon_0 (K-1)} = \frac{A\,\rho}{\varepsilon_0 (K-1)}\hat{\rho} + \frac{z}{\varepsilon_0 (K-1)}\hat{z}$$

~~Campo de un dieléctrico~~:

$$\cancel{\bar{E}_{(\bar{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iint_S d\right.}$$

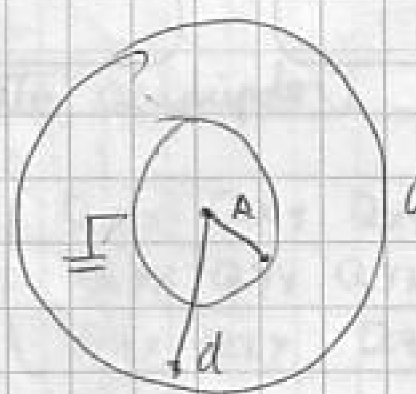
$$V_{(r)} = -\int \bar{E}\, d\bar{r} = -\int_A^0 \left(\frac{A\rho}{\varepsilon_0 (K-1)}\hat{\rho} + \frac{z}{\varepsilon_0 (K-1)}\hat{z} \right) \cdot d\rho\,\hat{\rho} =$$

$$V_i = -\frac{A}{\varepsilon_0 (K-1)} \int_A^0 \rho\, d\rho - \frac{z}{\varepsilon_0 (K-1)} \int_A^0 d\rho \cdot \hat{\rho} \cdot \hat{z}^{\;0}$$

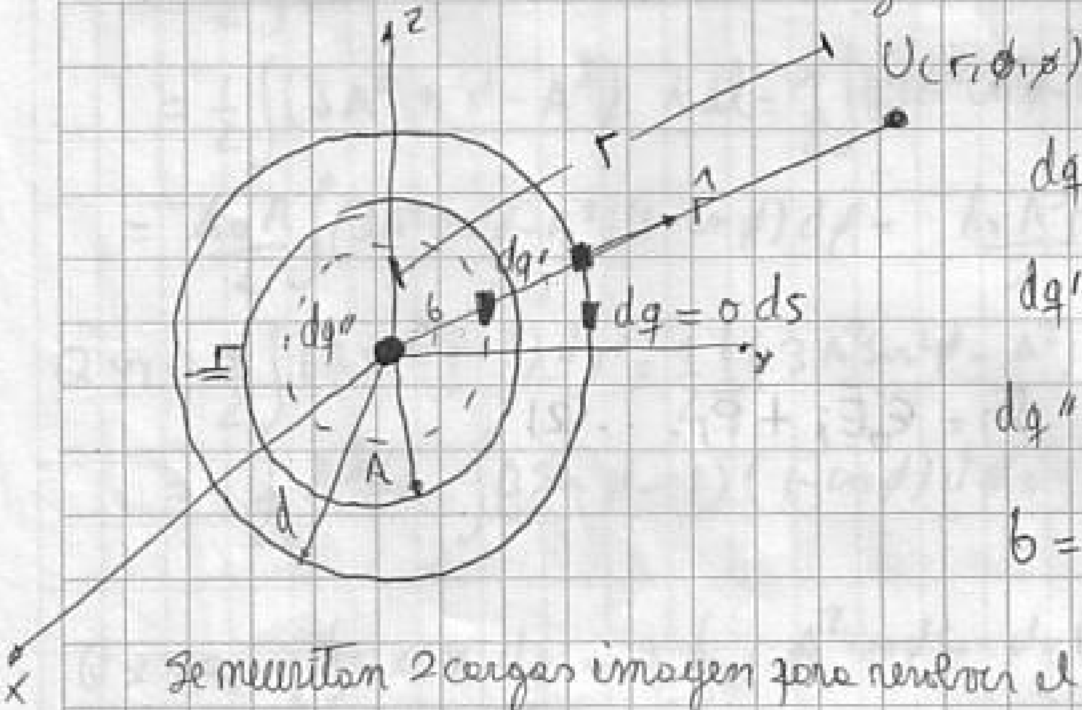
$$V_i = -\frac{A}{\varepsilon_0 (K-1)} \left(\frac{\rho^2}{2} \right)\Bigg|_A^0 = \frac{-A}{\varepsilon_0 (K-1)} \cdot \left(-\frac{A^2}{2} \right) = \frac{A^3}{2\varepsilon_0 (K-1)}$$

$$\therefore \quad V_\rho = \frac{A^3}{2\varepsilon_0 (K-1)}$$

3)



Solución: Usando teorema de imágenes



$$dq = \sigma\, ds \quad \ldots (1)$$

$$dq' = \cancel{\sigma ds} - \frac{A}{d} dq \quad \ldots (2)$$

$$dq'' = \frac{A}{d} dq \quad \ldots (3)$$

$$b = \frac{A^2}{d} \quad \ldots (4)$$

Se necesitan 2 cargas imagen para resolver el sistema:

=> El Potencial de en un punto "r" en dirección radial será el potencial de las tres cargas:

$$U_{(\bar r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq'}{r_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq''}{r_3} \quad \ldots (5)$$

$$\bar r_1 = (r-d)\,\hat r \;;\; \bar r_2 = (r-b)\,\hat r \;;\; \bar r_3 = r\,\hat r$$

$$|\bar r_1| = r-d \;;\; |\bar r_2| = r-b \;;\; |\bar r_3| = r$$

20

=> Reemplazando en (5):

$$U_{(\bar r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\iint_S \frac{\sigma\, ds}{r-d} + \iint_S -\frac{A\, dq}{d(r-b)} + \iint_S \frac{A}{d}\frac{dq}{r}\right]$$

$$U_{(\bar r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sigma \iint_S \frac{ds}{(r-d)} - \frac{\sigma A}{d}\iint_S \frac{ds}{(r-b)} + \frac{A\sigma}{d}\int_S \frac{ds}{r}\right]$$

$$U_{(\bar r)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sigma\frac{(4\pi d^2)}{r-d} - \sigma\frac{A}{d}\left(\frac{4\pi b^2}{r-b}\right) + \frac{A\sigma}{d}\left(\frac{4\pi d^2}{r}\right)\right]$$

$$U_{(\bar r)} = \frac{4\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{d^2}{r-d} - \frac{A\, b^2}{d(r-b)} + \frac{Ad}{r}\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{d^2}{r-d} - \frac{A^5}{d^3\left(r-\frac{A^2}{d}\right)} + \frac{Ad}{r}\right]$$

$$\therefore U_{(\bar r)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{d^2}{r-d} - \frac{A^5}{d^3\left(r-\frac{A^2}{d}\right)} + \frac{Ad}{r}\right]$$

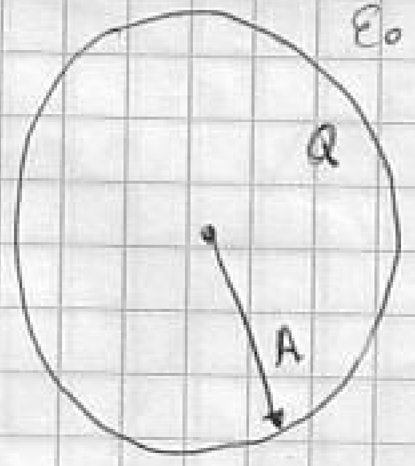
Hallando el campo:

$$\bar{E}_{(r)} = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{r} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{A^5}{d^3\left(r-\frac{A^2}{d}\right)^2} - \frac{d^2}{(r-d)^2} - \frac{Ad}{r^2}\right]\hat{r}$$

$$\therefore\ E_{(r)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[\frac{d^2}{(r-d)^2}+\frac{Ad}{r^2}-\frac{A^5}{d^3\left(r-\frac{A^2}{d}\right)^2}\right]\hat{r}$$

3)

a)



Capacitancia de la esfera:

$$C = \cancel{\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}} \qquad Q = \varepsilon\oint \bar{E}\cdot d\bar{s} = \varepsilon_0 E_p 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \bar{E}_p = \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{r} \qquad U = -\int \bar{E}\,d\bar{r}$$

$$C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \qquad U = -\int_\infty^0 \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^0 \frac{dr}{r^2} = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(r^{-1}\right)\Big|_\infty^A$$

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 A} \qquad C = 4\pi\varepsilon_0 A$$

Si la energía almacenada inicial:

$$W = \frac{1}{2}C(\Delta U)^2 \Rightarrow W = \frac{1}{2}\cdot 4\pi\varepsilon_0 A\cdot\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 A}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 A} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 A}$$

$$\therefore\ W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 A}$$